

受験番号		氏名	模範解答
------	--	----	------

1. (30 点)

(1) (10 点)

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ を用いる.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{x^2 \cos^7 x - x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{x^2 (\cos^7 x - x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{x^2} \cdot \frac{1}{\cos^7 x - x} = 1 \cdot \frac{1}{1 - 0} = 1$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{x^2 \cos^7 x - x^3} = \boxed{1}$$

2) (10 点)

対数微分法を用いる.

$$\begin{aligned} y = x^{\tan x} &\implies \log y = \log x^{\tan x} = \tan x \log x \implies (\log y)' = (\tan x \log x)' \\ &\implies (\log y)' = (\tan x)' \log x + \tan x (\log x)' \implies \frac{y'}{y} = \frac{\log x}{\cos^2 x} + \frac{\tan x}{x} \\ &\implies y' = y \left(\frac{\log x}{\cos^2 x} + \frac{\tan x}{x} \right) \implies y' = x^{\tan x} \left(\frac{\log x}{\cos^2 x} + \frac{\tan x}{x} \right) \end{aligned}$$

$$\therefore (x^{\tan x})' = \boxed{x^{\tan x} \left(\frac{\log x}{\cos^2 x} + \frac{\tan x}{x} \right)}$$

(3) (10 点)

$$\log 2x = u \text{ とおくと } \frac{du}{dx} = \frac{1}{x} \implies du = \frac{1}{x} dx, \quad \begin{array}{c|c} x & 1/e \rightarrow 1 \\ \hline u & \log 2 - 1 \rightarrow \log 2 \end{array}$$

$$(\text{与式}) = \int_{\log 2 - 1}^{\log 2} u \, du = \left[\frac{1}{2} u^2 \right]_{\log 2 - 1}^{\log 2} = \frac{1}{2} \{ (\log 2)^2 - (\log 2 - 1)^2 \} = \frac{1}{2} \{ 2 \log 2 - 1 \} = \log 2 - \frac{1}{2}$$

$$\therefore \int_{1/e}^1 \frac{\log 2x}{x} = \boxed{\log 2 - \frac{1}{2}}$$

小 計

30

受験番号

氏名

模範解答

2. (10 点)

$\frac{\partial x}{\partial u} = -\frac{3v}{(2u-v)^2}$, $\frac{\partial y}{\partial u} = 3(2u+1)e^{2u-v}$ だから, 合成関数の微分法より

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial u} = \boxed{-\frac{\partial z}{\partial x} \frac{3v}{(2u-v)^2} + \frac{\partial z}{\partial y} 3(2u+1)e^{2u-v}}$$

また, $\frac{\partial x}{\partial v} = \frac{3u}{(2u-v)^2}$, $\frac{\partial y}{\partial v} = -3ue^{2u-v}$ だから, 合成関数の微分法より

$$\frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial v} = \boxed{\frac{\partial z}{\partial x} \frac{3u}{(2u-v)^2} - \frac{\partial z}{\partial y} 3ue^{2u-v}}$$

3. (10 点)

$3x+y=u$, $x-y=v$ と変数変換する. このとき, $x = \frac{1}{4}u + \frac{1}{4}v$, $y = \frac{1}{4}u - \frac{3}{4}v$

$$x_u = \frac{1}{4}, x_v = \frac{1}{4}, y_u = \frac{1}{4}, y_v = -\frac{3}{4}. \text{ ヤコビアンは } \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & -\frac{3}{4} \end{vmatrix} = -\frac{1}{4}$$

また, $-2 \leq u \leq 2$, $-1 \leq v \leq 1$ である.

$$\begin{aligned} \iint_D (3x+y)^2 (x-y)^4 dx dy &= \iint_D u^2 v^4 \left| -\frac{1}{4} \right| du dv \\ &= \frac{1}{4} \iint_D u^2 v^4 du dv \\ &= \frac{1}{4} \int_{-1}^1 \left\{ v^4 \int_{-2}^2 u^2 du \right\} dv \\ &= \frac{1}{4} \int_{-1}^1 \left\{ v^4 \left[\frac{1}{3} u^3 \right]_{-2}^2 \right\} dv \\ &= \frac{1}{4} \int_{-1}^1 \left\{ v^4 \cdot \frac{16}{3} \right\} dv \\ &= \frac{1}{4} \cdot \frac{16}{3} \left[\frac{1}{5} v^5 \right]_{-1}^1 \\ &= \frac{1}{4} \cdot \frac{16}{3} \cdot \frac{2}{5} \\ &= \frac{8}{15} \end{aligned}$$

$$\therefore \iint_D (3x+y)^2 (x-y)^4 dx dy = \boxed{\frac{8}{15}}$$

小 計

20

受験番号

氏名

模範解答

4. (50 点)

(1) (10 点)

平面Ⅱの方程式を $px + qy + rz = s$ と仮定すると,

$$\begin{cases} pa + qb + rc = s & \dots (i) \\ pb + qc + ra = s & \dots (ii) \\ pc + qa + rb = s & \dots (iii) \end{cases}$$

である. また,

$$(i) - (ii) \implies (a - b)p + (b - c)q + (c - a)r = 0 \quad \dots (iv)$$

$$(ii) - (iii) \implies (b - c)p + (c - a)q + (a - b)r = 0 \quad \dots (v)$$

$$(iv) \times (a - b) - (v) \times (c - a) \implies (a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca)(p - q) = 0$$

ここで,

$$a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca = \frac{(a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2}{2} > 0$$

であることに注意すると $p = q$ がわかる. これを (iv) に代入して, $p = r$, ゆえに $p = q = r$ を得る. このとき

$$(i) + (ii) + (iii) \implies d(p + q + r) = 3s$$

より, $dp = s$ が分かる. $p = 1$ とおけば, $s = d$ を得る. 以上より平面Ⅱの方程式は

$$x + y + z = d$$

となる. あるいは, d を用いずに $x + y + z = a + b + c$ と答えてもよい.

(1) (別解)

平面Ⅱ内の非平行な2つのベクトルとして

$$\overrightarrow{AB} = (b, c, a) - (a, b, c) = (b - a, c - b, a - b), \quad \overrightarrow{AC} = (c, a, b) - (a, b, c) = (c - a, a - b, b - c)$$

があり, これらに直交するベクトルとして

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = (a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca)(1, 1, 1)$$

が可能なので, 法線ベクトルとして $(1, 1, 1)$ を選べる. 平面Ⅱの方程式は点 A を通るので

$$1 \cdot (x - a) + 1 \cdot (y - b) + 1 \cdot (z - c) = 0 \text{ ゆえに, } x + y + z = d \text{ である.}$$

あるいは, d を用いずに $x + y + z = a + b + c$ と答えてもよい.

小 計

10

受験番号

氏名

模範解答

(2) (10 点)

点と平面の距離の公式より,

$$\frac{|1 \times 0 + 1 \times 0 + 1 \times 0 - d|}{\sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2}} = \frac{d}{\sqrt{3}}$$

したがって, $\frac{d}{\sqrt{3}}$ である.あるいは, d を用いずに $\frac{a+b+c}{\sqrt{3}}$ と答えてもよい.

(3) (10 点)

題意の四面体の体積は, 3つのベクトル $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$ が張る平行六面体の体積の6分の1である.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -18$$

であるから,

$$V = \frac{|-18|}{6} = 3$$

したがって $V = 3$ である.

小 計

20

受験番号		氏名	模範解答
------	--	----	------

(4) (10 点)

f を表す行列を M とすると, $M \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$, $M \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $M \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ であり, これを併記して,

$$M \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow M = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}^{-1} \text{ を計算すればよい.}$$

前問より $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -18$ であり, $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ の余因子は

$$C_{11} = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 5, \quad C_{21} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1, \quad C_{31} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -7,$$

$$C_{12} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 1, \quad C_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -7, \quad C_{32} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -5,$$

$$C_{13} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -7, \quad C_{23} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -5, \quad C_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -1 \quad \text{となる. すなわち,}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}^{-1} = -\frac{1}{18} \begin{pmatrix} 5 & -1 & -7 \\ -1 & -7 & 5 \\ -7 & 5 & -1 \end{pmatrix}$$

したがって,

$$M = -\frac{1}{18} \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & -1 & -7 \\ -1 & -7 & 5 \\ -7 & 5 & -1 \end{pmatrix} = -\frac{1}{18} \begin{pmatrix} 0 & -18 & 0 \\ 0 & 0 & -18 \\ -18 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

小 計

10

受験番号		氏名	模範解答
------	--	----	------

(5) (10 点)

求める球面の方程式を $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = r^2$ とおくと、点 O を通るので、

$$x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 = r^2 \qquad \dots (i)$$

である。3 点 A, B, C を通るので、

$$(1 - x_0)^2 + (2 - y_0)^2 + (3 - z_0)^2 = r^2 \implies 2(x_0 + 2y_0 + 3z_0) = 14 + x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 - r^2$$

$$(2 - x_0)^2 + (3 - y_0)^2 + (1 - z_0)^2 = r^2 \implies 2(2x_0 + 3y_0 + z_0) = 14 + x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 - r^2$$

$$(3 - x_0)^2 + (1 - y_0)^2 + (2 - z_0)^2 = r^2 \implies 2(3x_0 + y_0 + 2z_0) = 14 + x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 - r^2$$

である。(i) を利用すれば、

$$x_0 + 2y_0 + 3z_0 = 7, \qquad \dots (ii)$$

$$2x_0 + 3y_0 + z_0 = 7, \qquad \dots (iii)$$

$$3x_0 + y_0 + 2z_0 = 7, \qquad \dots (iv)$$

が得られる。これを解くと $x_0 = y_0 = z_0 = \frac{7}{6}$ が得られる。

(i) に $x_0 = y_0 = z_0 = \frac{7}{6}$ を代入すると、 $r = \frac{7\sqrt{3}}{6}$ である。したがって、

中心 $\left(\frac{7}{6}, \frac{7}{6}, \frac{7}{6}\right)$ と 半径 $\frac{7\sqrt{3}}{6}$

を得る。(部分点は各 5 点)

小 計	総 得 点
10	100