

受験番号		氏名	模範解答
------	--	----	------

1. (20点)

(1) (10点)

積の微分公式と合成関数の微分法を用いる.

$$(x \cos \sqrt{x})' = x' \cos \sqrt{x} + x (\cos \sqrt{x})' = \cos \sqrt{x} + x (-\sin \sqrt{x}) (\sqrt{x})' = \cos \sqrt{x} - \frac{1}{2} \sqrt{x} \sin \sqrt{x}$$

(2) (10点)

置換積分法を用いる. $2 + \cos x = t$ とおくと $-\sin x dx = dt$ だから $\sin x dx = -dt$.

と t の対応は次のようになる.

x	$0 \rightarrow \pi$
t	$3 \rightarrow 1$

従って,

$$\int_0^\pi \frac{\sin x}{2 + \cos x} dx = \int_3^1 \frac{1}{t} (-dt) = \int_1^3 \frac{1}{t} dt = [\log |t|]_1^3 = \log 3$$

2. (10点)

両辺を x で割ると,

$$\frac{1}{x} \frac{dx}{dt} = -6t^2.$$

両辺を t について不定積分すると

$$\int \frac{1}{x} dx = - \int 6t^2 dt \Rightarrow \log |x| = -2t^3 + C \quad (C \text{ は任意定数}).$$

 x について解くと

$$|x| = e^{-2t^3 + C} = e^C e^{-2t^3} \Rightarrow x = \pm e^C e^{-2t^3}.$$

 $D = \pm e^C$ とおくと D は 0 でない任意定数である. また, $x = 0$ は自明な解である. 以上より, 求める一般解は

$$x = D e^{-2t^3} \quad (D \text{ は任意定数})$$

小 計

30

受験番号		氏名	模範解答
------	--	----	------

3. (10 点)

$f(x) = (1 - 2x)^{\frac{1}{2}}$ の3次導関数までを求め、 $x = 0$ を代入すると

$$f'(x) = -(1 - 2x)^{-\frac{1}{2}} \Rightarrow f'(0) = -1,$$

$$f''(x) = -(1 - 2x)^{-\frac{3}{2}} \Rightarrow f''(0) = -1,$$

$$f'''(x) = -3(1 - 2x)^{-\frac{5}{2}} \Rightarrow f'''(0) = -3,$$

また、 $f(0) = 1$ であるから、 $f(x)$ の3次までのマクローリン展開は次で与えられる。

$$f(0) + f'(0)x + \frac{1}{2}f''(0)x^2 + \frac{1}{3!}f'''(0)x^3 = \boxed{1 - x - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x^3}.$$

4. (10 点)

$x + y = 2u, x - y = 2v$ と変数変換すると、 $x = u + v, y = u - v$ となる。このとき、領域 D は次で与えられる。

$$D = \{ (u, v) \mid 0 \leq u \leq 1, 0 \leq v \leq 1 \}.$$

また、ヤコビアンは

$$J(u, v) = \frac{\partial x}{\partial u} \cdot \frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v} \cdot \frac{\partial y}{\partial u} = 1 \cdot (-1) - 1 \cdot 1 = -2.$$

なる。したがって、与えられた積分は次のように計算される。

$$\begin{aligned} & \iint_D (x + y)e^{x-y} dx dy \\ &= \iint_D 2u e^{2v} |J(u, v)| du dv = \left(\int_0^1 2u du \right) \left(\int_0^1 2e^{2v} dv \right) = [u^2]_0^1 [e^{2v}]_0^1 = \boxed{e^2 - 1}. \end{aligned}$$

小 計

20

受験番号		氏名	模範解答
------	--	----	------

5. (20 点)

(1) (10 点)

$$\begin{cases} 8x - 4y - z = 1 \\ 2x + 2y - z = 1 \end{cases} \iff x = y = \frac{z+1}{4}$$

 $x = t$ とおくと, $x = t, y = t, z = 4t - 1$ (t は任意の実数)

(1) (別解)

$$\text{求める直線の方程式を} \begin{cases} x = a + dt \\ y = b + et \\ z = c + ft \end{cases} \text{ と仮定し, 平面の方程式 } 8x - 4y - z = 1, 2x + 2y - z = 1 \text{ に代入する.}$$

$$\begin{cases} 8(a + dt) - 4(b + et) - (c + ft) = 1 \\ 2(a + dt) + 2(b + et) - (c + ft) = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} (8a - 4b - c) + (8d - 4e - f)t = 1 \\ (2a + 2b - c) + (2d + 2e - f)t = 1 \end{cases}$$

$$\text{したがって} \begin{cases} 8a - 4b - c = 1 \\ 2a + 2b - c = 1 \end{cases} \quad \text{かつ} \quad \begin{cases} 8d - 4e - f = 0 \\ 2d + 2e - f = 0 \end{cases} \iff \begin{pmatrix} 8 & -4 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & d \\ b & e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c+1 & f \\ c+1 & f \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{pmatrix} a & d \\ b & e \end{pmatrix} = \frac{1}{24} \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -2 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c+1 & f \\ c+1 & f \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} c+1 & f \\ c+1 & f \end{pmatrix}.$$

 $= -1, f = 4$ のとき, $a = b = 0, d = e = 1$. ゆえに, $x = t, y = t, z = 4t - 1$ (t は任意の実数)

(2) (10 点)

2 平面のなす角は法線ベクトルのなす角である. これを θ で表す. 法線ベクトルをそれぞれ $\vec{n}_1, \vec{n}_2$ で表すと,

$$\vec{n}_1 = (8, -4, -1), \quad \vec{n}_2 = (2, 2, -1)$$

である. したがって

$$\cos \theta = \frac{\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2}{|\vec{n}_1| |\vec{n}_2|} = \frac{16 - 8 + 1}{\sqrt{8^2 + (-4)^2 + (-1)^2} \sqrt{2^2 + 2^2 + (-1)^2}} = \frac{9}{\sqrt{81} \sqrt{9}} = \frac{1}{3} \quad \Rightarrow \quad \theta = \cos^{-1} \frac{1}{3}$$

小 計

20

受験番号		氏名	模範解答
------	--	----	------

6. (30 点)

(1) (10 点)

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 4 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2-t \\ 1+2t \\ 1+t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2(2-t) - (1+2t) + 1(1+t) \\ -1(2-t) + 2(1+2t) - (1+t) \\ 4(2-t) + 0(1+2t) + 2(1+t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4-3t \\ -1+4t \\ 10-2t \end{pmatrix}$$

したがって

$$x = 4 - 3t, y = -1 + 4t, z = 10 - 2t \quad (t \text{ は任意の実数})$$

$$\text{あるいは } \frac{x-4}{-3} = \frac{y+1}{4} = \frac{z-10}{-2} \text{ でもよい.}$$

(2) (10 点)

A の行列式は

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 4 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 8 + 4 + 0 - 0 - 2 - 8 = 2,$$

A の余因子は

$$\begin{aligned} C_{11} &= \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 4, & C_{12} &= -\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = -2, & C_{13} &= \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} = -8, \\ C_{21} &= -\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 2, & C_{22} &= \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 0, & C_{23} &= -\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} = -4, \\ C_{31} &= \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -1, & C_{32} &= -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = 1, & C_{33} &= \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 3 \end{aligned}$$

以上より

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -\frac{1}{2} \\ -1 & 0 & \frac{1}{2} \\ -4 & -2 & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$$

小 計

20

受験番号		氏名	模範解答
------	--	----	------

6.

(2) 別解

行基本変形によって求める.

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{R_3+4R_2}]{R_1+2R_2} \begin{pmatrix} 0 & 3 & -1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 8 & -2 & 0 & 4 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{R_2 \leftarrow R_3 - 2R_1}]{R_1 \leftarrow R_2, R_3 \leftarrow R_1} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & -1 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \\
 \xrightarrow[\substack{R_3 - \frac{3}{2}R_2}]{R_1+R_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 4 & 2 & -\frac{3}{2} \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{R_2 \div 2, R_3 \times (-1)}]{R_1+R_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 & -1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -4 & -2 & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$$

したがって

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -\frac{1}{2} \\ -1 & 0 & \frac{1}{2} \\ -4 & -2 & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$$

(3) (10点)

6(2) より

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -\frac{1}{2} \\ -1 & 0 & \frac{1}{2} \\ -4 & -2 & \frac{3}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x' + y' - \frac{z'}{2} \\ -x' + \frac{z'}{2} \\ -4x' - 2y' + \frac{3z'}{2} \end{pmatrix}$$

 (x, y, z) は, 平面 $x - 2y + 2z = 1$ 上にあるので,

$$(2x' + y' - \frac{z'}{2}) - 2(-x' + \frac{z'}{2}) + 2(-4x' - 2y' + \frac{3z'}{2}) = 1 \iff -4x' - 3y' + \frac{3}{2}z' = 1$$

したがって,

$$8x' + 6y' - 3z' = -2$$

あるいは $8x + 6y - 3z = -2$ でもよい.

小 計	総 得 点
10	100