

受験番号

氏名

1.

(1) (5 点)

$$(\sqrt{2-x})' = \left((2-x)^{\frac{1}{2}}\right)' = \frac{1}{2}(2-x)^{-\frac{1}{2}} \cdot (2-x)' = -\frac{1}{2\sqrt{2-x}}$$

答え： $-\frac{1}{2\sqrt{2-x}}$

(2) (5 点)

$$\left(\frac{\cos(x^2)}{2}\right)' = \frac{-\sin(x^2) \cdot (x^2)'}{2} = -x \sin(x^2)$$

答え： $-x \sin(x^2)$

(3) (5 点)

$$x = 2u - 1 \text{ とおくと } dx = 2du \implies du = \frac{1}{2}dx, \quad \begin{array}{c|c} u & 0 \rightarrow 1 \\ \hline x & -1 \rightarrow 1 \end{array}$$

$$\int_0^1 (2u-1)^4 du = \int_{-1}^1 x^4 \cdot \frac{1}{2} dx = \int_0^1 x^4 dx = \left[\frac{1}{5}x^5\right]_0^1 = \frac{1}{5}$$

答え： $\frac{1}{5}$

(4) (5 点)

$$\begin{aligned} \int_0^1 te^{2t} dt &= \int_0^1 t \left(\frac{1}{2}e^{2t}\right)' dt \\ &= \left[t \cdot \frac{1}{2}e^{2t}\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{1}{2}e^{2t} dt \\ &= \frac{1}{2}e^2 - \left[\frac{1}{4}e^{2t}\right]_0^1 \\ &= \frac{1}{2}e^2 - \frac{1}{4}(e^2 - 1) = \frac{1}{4}(e^2 + 1) \end{aligned}$$

答え： $\frac{1}{4}(e^2 + 1)$

小 計

20

受験番号

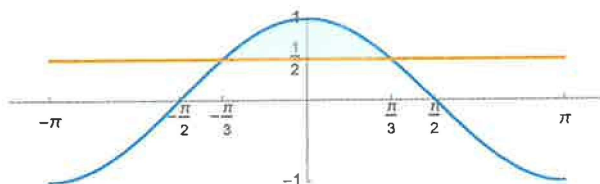
氏名

2. (10 点)

$-\pi \leq x \leq \pi$ の範囲において、 $y = \cos x$ と $y = \frac{1}{2}$ の交点の x 座標を求めると

$$\cos x = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \pm \frac{\pi}{3}$$

である。グラフを書くと以下ようになる。



従って、囲まれた領域の面積は次のように計算できる。

$$\begin{aligned} \int_{-\pi/3}^{\pi/3} \left(\cos x - \frac{1}{2} \right) dx &= 2 \int_0^{\pi/3} \left(\cos x - \frac{1}{2} \right) dx \\ &= 2 \left[\sin x - \frac{1}{2}x \right]_0^{\pi/3} \\ &= 2 \left(\sin \frac{\pi}{3} - \frac{1}{2} \times \frac{\pi}{3} \right) \\ &= 2 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi}{6} \right) = \sqrt{3} - \frac{\pi}{3} \end{aligned}$$

答え： $\sqrt{3} - \frac{\pi}{3}$

3.

(1) (10 点)

$z = x^3 - y^3 - 3x^2 + 3y^2 - 24x$ を x, y それぞれについて偏微分すると

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 3x^2 - 6x - 24$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -3y^2 + 6y$$

答え： $\frac{\partial z}{\partial x} = 3x^2 - 6x - 24, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -3y^2 + 6y$

小 計

20

受験番号

氏名

3.

(2) (10 点)

まず、極値をとり得る点を求める。 $\frac{\partial z}{\partial x} = 0$ のとき、

$$3x^2 - 6x - 24 = 0 \Rightarrow x^2 - 2x - 8 = 0 \Rightarrow (x - 4)(x + 2) = 0 \Rightarrow x = -2, 4.$$

$\frac{\partial z}{\partial y} = 0$ のとき、

$$-3y^2 + 6y = 0 \Rightarrow -3y(y - 2) = 0 \Rightarrow y = 0, 2.$$

したがって、 $y > 0$ において極値をとり得る点は $(x, y) = (-2, 2)$, $(4, 2)$.

ここで、2 階の偏微分を求めると

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 6x - 6 = 6(x - 1),$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -6y + 6 = -6(y - 1),$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 0.$$

このとき、

$$H(x, y) = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \times \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -36(x - 1)(y - 1)$$

と関数 $H(x, y)$ を定めると、極値をとり得る点において

$$H(-2, 2) = -36 \times (-3) \times 1 > 0, \quad H(4, 2) = -36 \times 3 \times 1 < 0$$

となる。したがって、 $(x, y) = (-2, 2)$ では極値を取るが、 $(x, y) = (4, 2)$ では極値を取らない。 $(x, y) = (-2, 2)$ のとき、

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 6 \times (-3) < 0, \quad z = (-2)^3 - 2^2 - 3 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2^2 - 24 \cdot (-2) = -8 - 8 + 48 = 32$$

となる。したがって、 $(x, y) = (-2, 2)$ のとき、極大値 32 をとる。

小 計

10

答え： $(x, y) = (-2, 2)$ のとき、極大値 32 をとる。

受験番号

氏名

4.

(1) (5 点)

内積の性質より

$$\begin{aligned}
 \left| 3\vec{a} - \vec{b} \right|^2 &= (3\vec{a} - \vec{b}) \cdot (3\vec{a} - \vec{b}) \\
 &= 9\left| \vec{a} \right|^2 - 6\vec{a} \cdot \vec{b} + \left| \vec{b} \right|^2 \\
 &= 9 \cdot \sqrt{2}^2 - 6 \cdot (-2) + 2^2 \\
 &= 34
 \end{aligned}$$

$$\text{よって、} \left| 3\vec{a} - \vec{b} \right| = \sqrt{34}$$

答え： $\sqrt{34}$

(2) (5 点)

2 ベクトルの垂直条件より

$$\begin{aligned}
 \vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 = 0 &\implies (1, k, -2) \cdot (2, k+1, -k) = 0 \\
 &\implies k^2 + 3k + 2 = 0 \\
 &\implies (k+1)(k+2) = 0
 \end{aligned}$$

$$\text{よって、} k = -1, -2$$

答え： $k = -1, -2$

(3) (10 点)

2 次正方行列の正則性より

$$|A| = (-4) \cdot a - 3 \cdot 2 = -4a - 6 \neq 0 \text{ より } a \neq -\frac{3}{2}$$

また、 $AB = E$ より求める B は A^{-1} だから

$$B = A^{-1} = \frac{1}{-4a-6} \begin{pmatrix} a & -3 \\ -2 & -4 \end{pmatrix} = \frac{1}{4a+6} \begin{pmatrix} -a & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{a}{4a+6} & \frac{3}{4a+6} \\ \frac{2}{4a+6} & \frac{4}{4a+6} \end{pmatrix}$$

$$\text{答え： } a \neq -\frac{3}{2}, \quad B = \begin{pmatrix} -\frac{a}{4a+6} & \frac{3}{4a+6} \\ \frac{2}{4a+6} & \frac{4}{4a+6} \end{pmatrix}$$

小 計

20

受験番号

氏名

4.

(4) (5 点)

求め方は問わない：

$$\begin{vmatrix} 2 & 6 & 8 \\ 1 & 0 & 3 \\ 4 & 0 & 5 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 6 & 2 & 8 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \end{vmatrix} = -6 \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = -6 \cdot (1 \cdot 5 - 3 \cdot 4) = -6 \cdot (-7) = 42$$

答え：42

(5) (5 点)

与式の左辺は

$$(A + 2B)(A - 2B) = A^2 - 2AB + 2BA - 4B^2$$

であるから、与式について

$$A^2 - 2AB + 2BA - 4B^2 = A^2 - 4B^2 \implies -2AB + 2BA = 0 \implies AB = BA$$

よって、条件は $AB = BA$ となる。答え： $AB = BA$

小 計

10

受験番号		氏名	
------	--	----	--

5.

(1) (10 点)

行基本変形により階段行列を作ると

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & a \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{3 \text{ 行}-2 \times 1 \text{ 行}}]{2 \text{ 行}-3 \times 1 \text{ 行}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 5 & -5 \\ 0 & 5 & a-4 \end{pmatrix} \xrightarrow{3 \text{ 行}-1 \times 2 \text{ 行}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 5 & -5 \\ 0 & 0 & a+1 \end{pmatrix}$$

よって、階数が 2 になる条件は $a+1=0$ より $a=-1$

答え： $a=-1$

(2) (10 点)

消去法を用いる。拡大係数行列について

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & -7 & 3 \\ 2 & 1 & -4 & 1 \\ 1 & 1 & -3 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{3 \text{ 行} \leftrightarrow 1 \text{ 行}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 & 2 \\ 2 & 1 & -4 & 1 \\ 3 & 2 & -7 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\substack{2 \text{ 行}-2 \times 1 \text{ 行}}]{3 \text{ 行}-2 \times 1 \text{ 行}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 & 2 \\ 0 & -1 & 2 & -3 \\ 0 & -1 & 2 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{3 \text{ 行}-1 \times 2 \text{ 行}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 & 2 \\ 0 & -1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

よって、連立方程式は

$$x+y-3z=2$$

$$-y+2z=-3$$

これを z, y, x の順に求めると $z=t, y=3+2t, x=t-1$ (t : 任意の実数)

答え： $x=t-1, y=3+2t, z=t$ (t : 任意の実数)

小 計	総 得 点
20	100